

Série 1a

Question 1a1 Diagramme des forces

Pour chaque cas, dessinez:

- **le diagramme des forces pour la poutre (donc ne dessinez que la poutre, seule).** Les poutres ont toutes une masse, et la gravité est vers le bas
- **le diagramme des forces pour chaque support** (normalement, nous ne dessinons que les forces et moments sur la poutre isolée, ici le but est de vous faire visualiser que la même force, mais opposée est imposée par la poutre sur le support)

Rappel :

- Si un support empêche une translation, une force est générée par le support sur le solide (et donc la même force est générée dans la direction opposée par le support sur le solide)
- Si un support empêche une rotation, un moment est généré sur le solide dans la direction opposée.

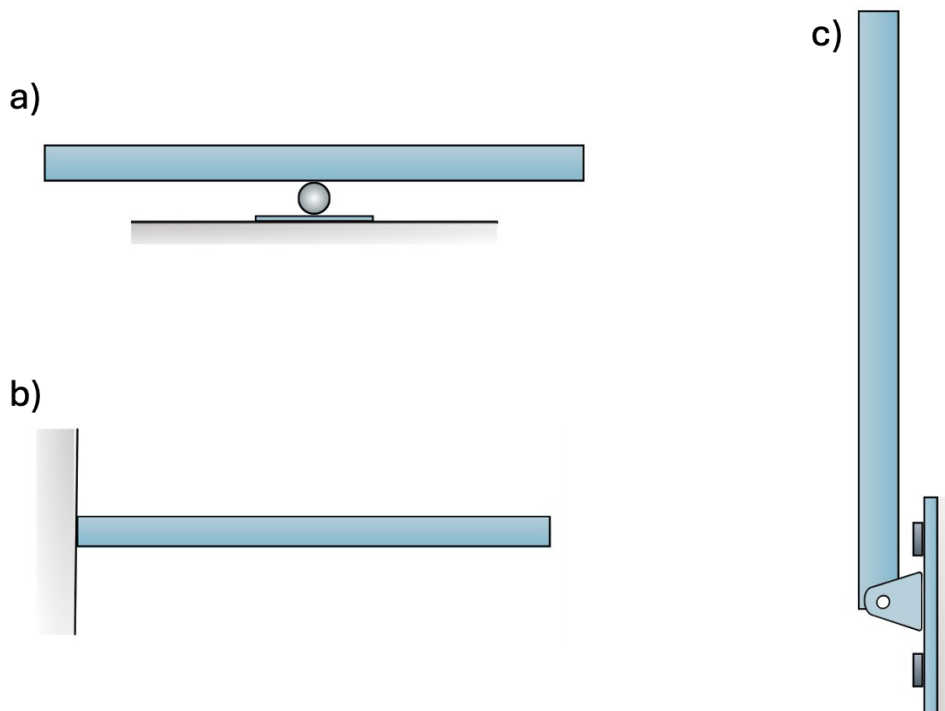


Figure 1a1.1 | Poutres à analyser

Solution 1a1

L'objectif de cet exercice est de comprendre le lien physique entre les degrés de liberté libre/bloqué et les forces internes.

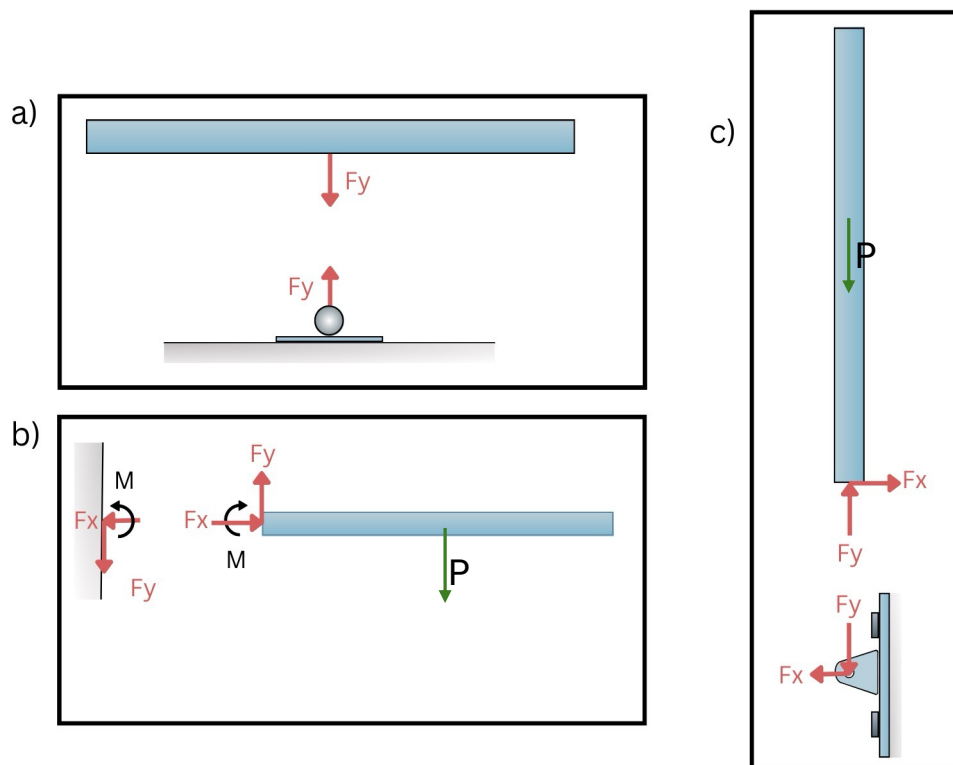


Figure 1a1.2 | Diagramme des forces pour chaque poutre

Question 1a2 Diagramme des forces

La Figure 1a2a résume les forces de réaction pour différentes liaisons.

Utilisez ce tableau pour dessiner les diagrammes des forces pour les poutres de la figure 1a2b
Pour c et d, on vous demande un diagramme des forces de chaque poutre.

Rappel:

- a) **ne dessinez que la poutre!** Pas les supports, sac de sable, etc.
- b) n'oubliez pas les moments de réaction

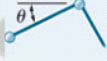
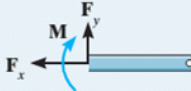
Type of Connection	Idealized Symbol	Reaction	Number of Unknowns
(1)  light cable  weightless link			One unknown. The reaction is a force that acts in the direction of the cable or link.
(2)  rollers  rocker	 		One unknown. The reaction is a force that acts perpendicular to the surface at the point of contact.
(3)  smooth contacting surface			One unknown. The reaction is a force that acts perpendicular to the surface at the point of contact.
(4)  smooth pin-connected collar			One unknown. The reaction is a force that acts perpendicular to the surface at the point of contact.
(5)  smooth pin or hinge			Two unknowns. The reactions are two force components.
(6)  slider  fixed-connected collar	 		Two unknowns. The reactions are a force and a moment.
(7)  fixed support			Three unknowns. The reactions are the moment and the two force components.

Figure 1a2a | Tableau résumé des types de liaisons et les forces/moments associés

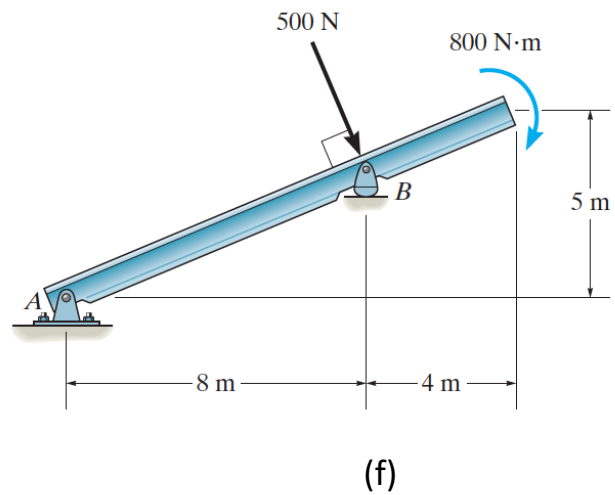
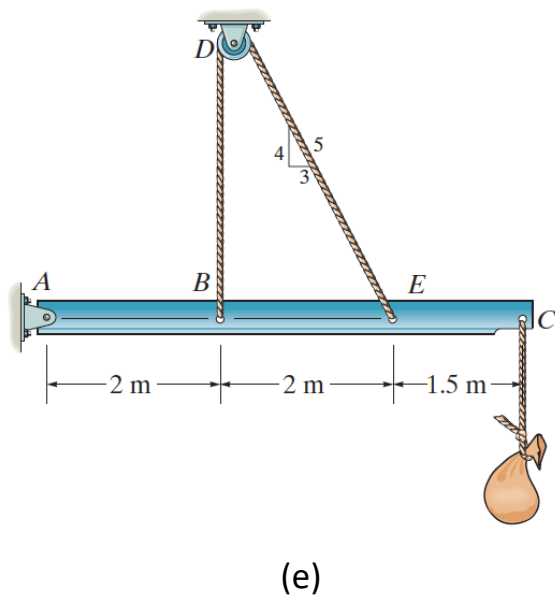
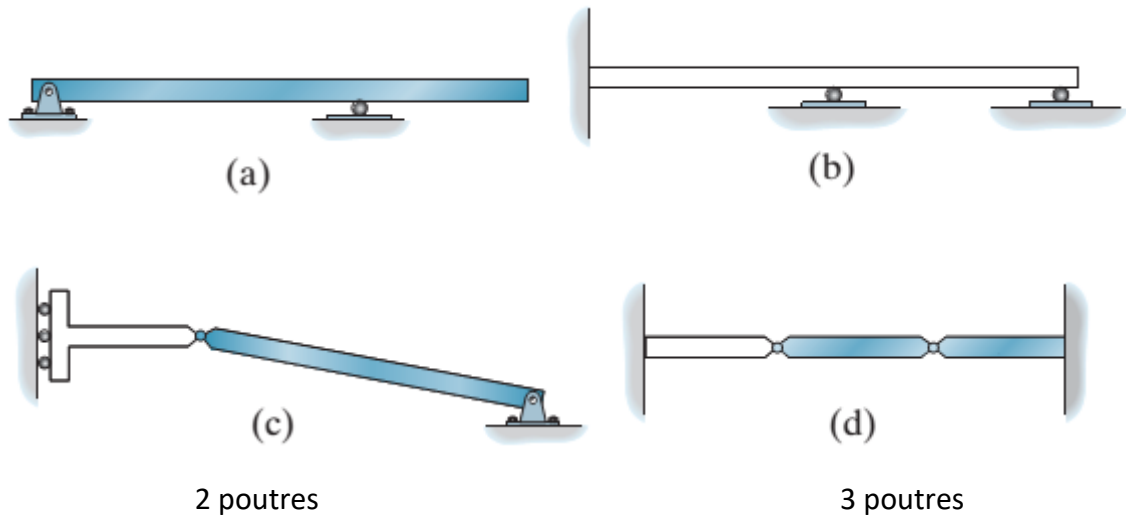


Figure 1a2b| Dessiner le diagramme des forces des poutres bleues. Pour c et d, on vous demande un diagramme des forces pour chaque poutre

Solution 1a2

Méthode générale pour résoudre un exercice sur les diagrammes des forces:

1. Identifiez les supports : Pour chaque poutre, déterminez les types de supports. Les supports empêchent des translations ou des rotations, et génèrent donc des forces et des moments de réaction.

2. Isolez la poutre : Considérez chaque poutre individuellement en la séparant du reste du système. *Dessinez seulement la poutre.*

3. Dessinez les réactions (sur la poutre) : En fonction des types de supports identifiés, esquissez les réactions générées par les supports sur la poutre.

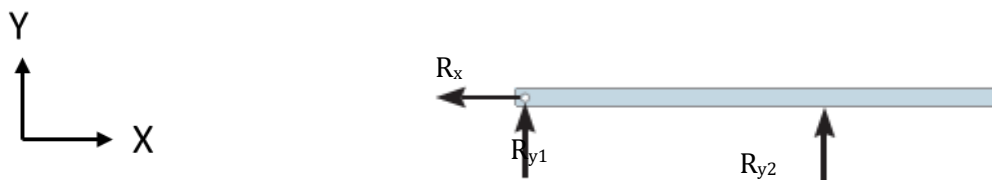
ATTENTION: Seules les forces et moments de réactions des supports doivent être dessinées, jamais les supports!

4. Dessinez les forces externes appliquées (sur la poutre) : Identifiez les charges appliquées sur la poutre (par exemple les forces ou les charges distribuées).

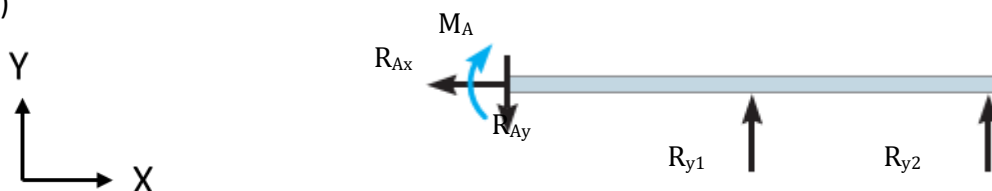
Assurez-vous de représenter correctement les directions et les points d'application des forces et moments. Le sens que vous dessinez n'est pas important dans un diagramme des forces, puisqu'il ne représente pas le sens physique.

6. Nommez toutes les forces et moments !

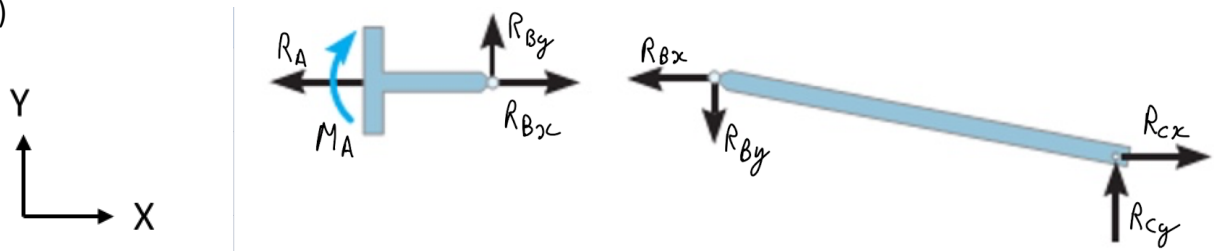
a)



b)

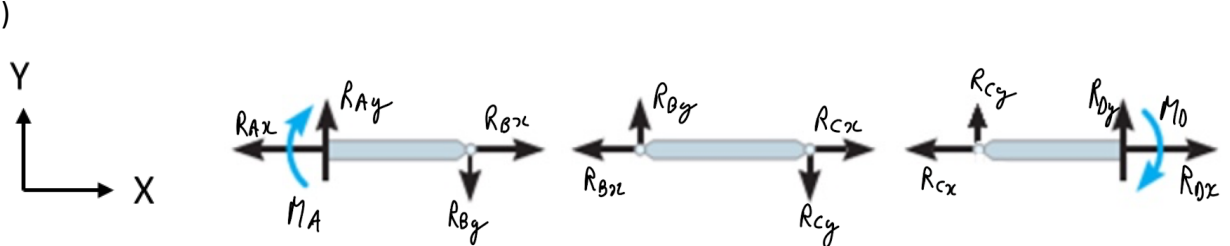


c)

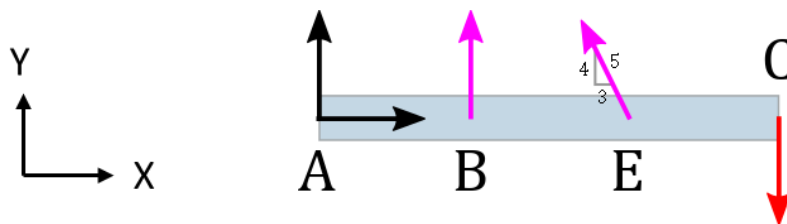


N'oubliez pas que la direction des flèches choisies pour le dessin ne représente pas nécessairement le sens physique des forces et des moments. Vous trouverez simplement un résultat positif ou négatif selon vos calculs.

d)

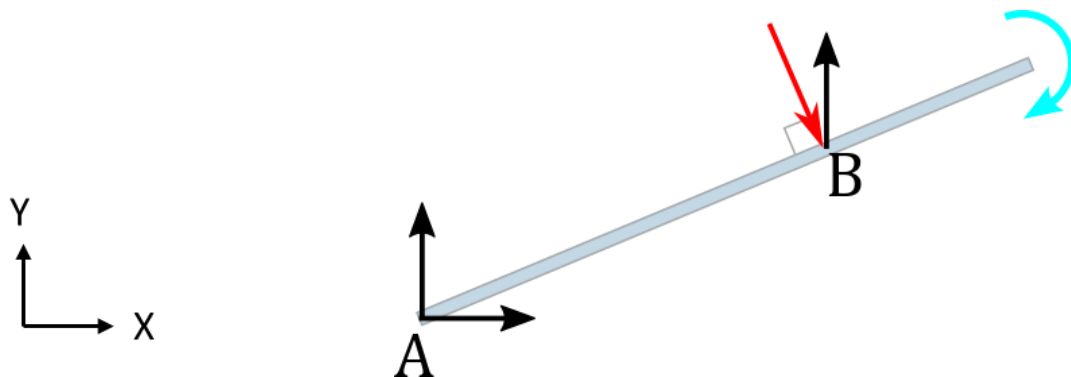


e)



les forces de réaction en B et E ont des normes égales à cause de l'action de la poulie en D, pour un système statique

f)

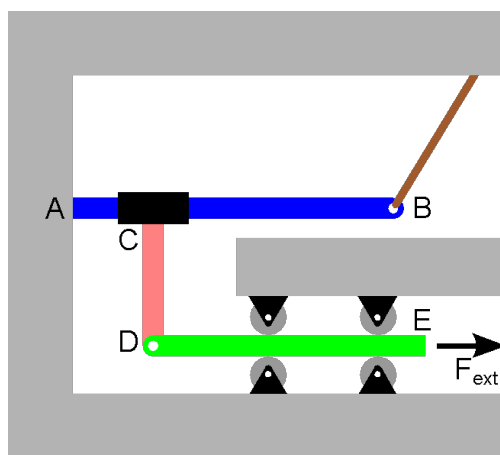


(Forces de réaction dessinées en noir ; charge externe dessinée en rouge)

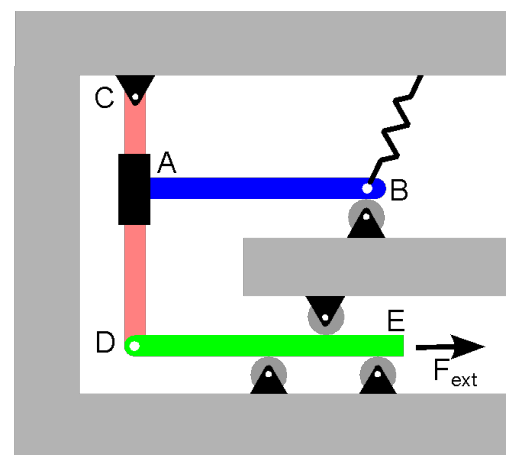
Question 1a3 Diagramme des forces

Figure 1a3(a) : Le système (les 3 tiges en couleur, c-à-d AB + CD + DE) est : ancré en A, supporté par une corde en B, guidé par un système de roulement entre les points D et E, et soumis à une force externe F_{ext} appliquée au point E. Les segments CD et DE sont liés par un pivot au point D, et le point C coulisse le long de la tige AB.

Figure 1a3(b) : Le système (les 3 tiges en couleur) est : lié à un pivot en C, attaché à un ressort en B, et soumis à une force externe F_{ext} appliquée au point E. Les segments AB et DE sont guidés par des systèmes de roulements, et le point A coulisse le long de la tige CD.



(a)



(b)

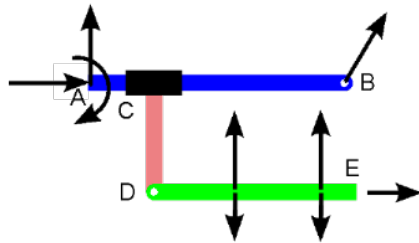
Figure 1a3 | Poutres.

On néglige tout frottement, ainsi que la gravité. Pour chaque système :

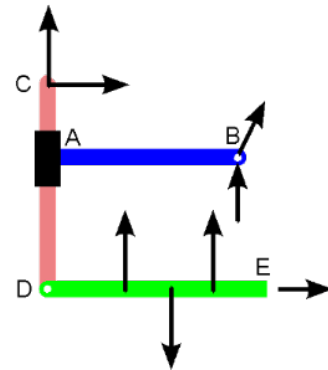
- (i) Dessinez le diagramme des forces du système complet (les trois tiges liées).
- (ii) Dessinez le diagramme des forces pour chacun des trois sous-systèmes de segments AB, CD et DE.
 - Nommez toutes les forces.
 - Minimisez le nombre d'inconnues en utilisant les conditions de liaison : quand deux corps sont en contact, il y a de chaque côté des forces/moments de liaisons égaux et opposés

Solution 1a3

i)

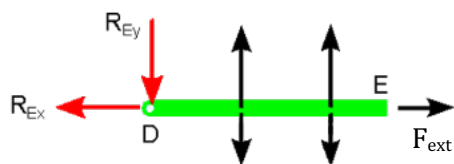
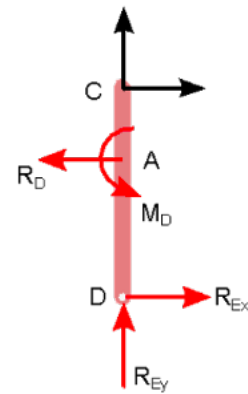
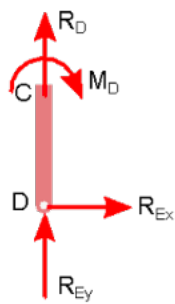
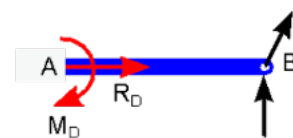
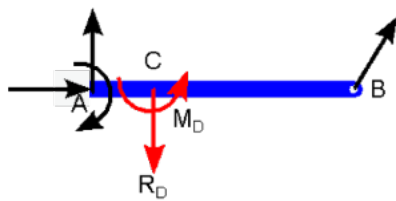


(a)

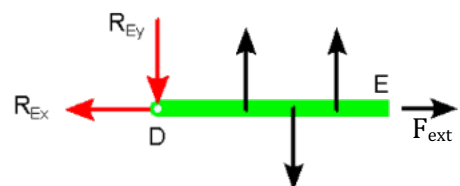


(b)

ii)



(a)



(b)

Question 1a4 Joyeux ouvrier

On considère le système représenté en figure 1a4a. Il consiste en un joyeux ouvrier, une barre, cinq poulies et 3 cordes inextensibles. Le système est à l'équilibre statique.

L'ouvrier, de masse $4m$, se situe à une distance d du point A.

La barre, de masse $5m$, forme un angle α avec l'horizontale.

La barre a une longueur de $5L$ et est suspendue en deux points par des pivots à un système de poulies.

Attention, les poulies ont des masses différentes (voir figure 1a4).

Répondez aux questions suivantes sur les figures 1a4b et 1a4c.

- (a) Dessinez toutes les forces externes et tous les moments externes agissant sur chacun des trois sous-systèmes. (voir figure 1a4b).

Ces systèmes ont été choisis pour faciliter la résolution du problème au prochain point! Il y a d'autres choix valables de sous-systèmes.

- (b) A l'équilibre statique, calculez les tensions dans les cordes : T_1 , T_2 et T_3 .

Exprimez vos réponses en fonction de m et de g .

- (c) Dessinez toutes les forces externes et tous les moments externes agissant sur le sous-système barre en figure 1a4c.

- (d) Calculez la distance d entre l'ouvrier et le point A, pour que le système soit en équilibre statique.

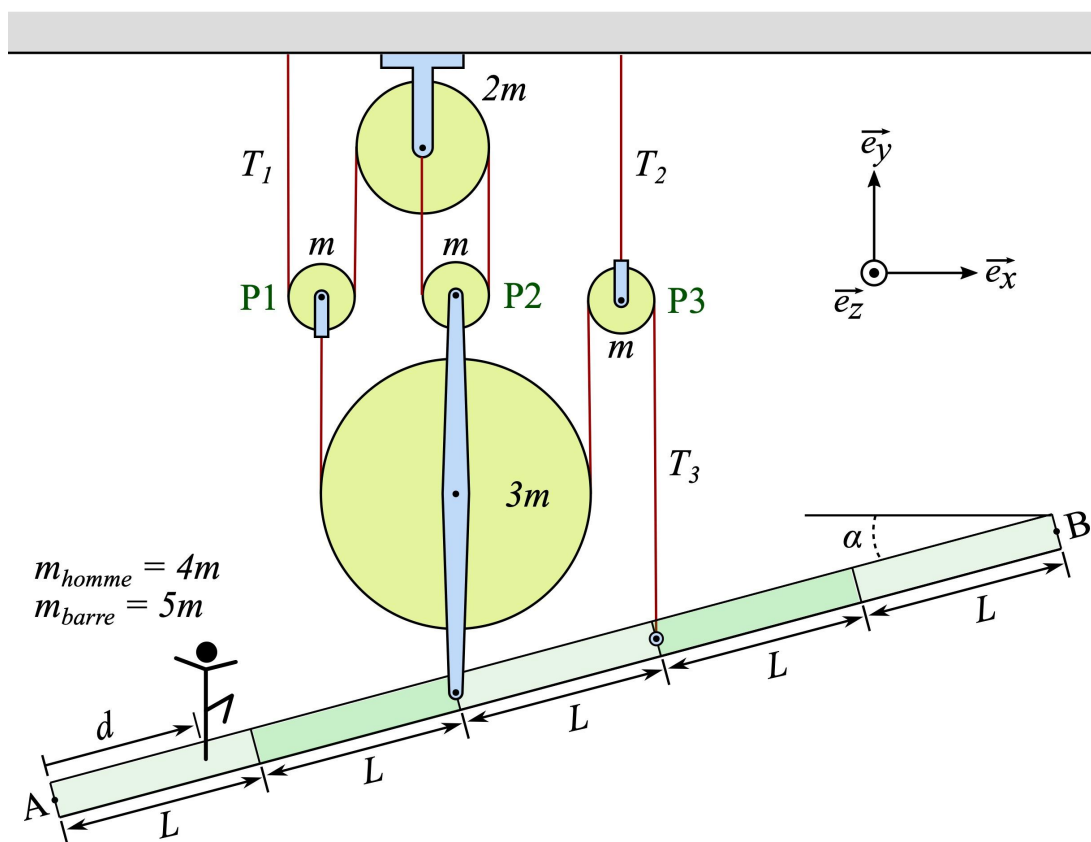


Figure 1a4a

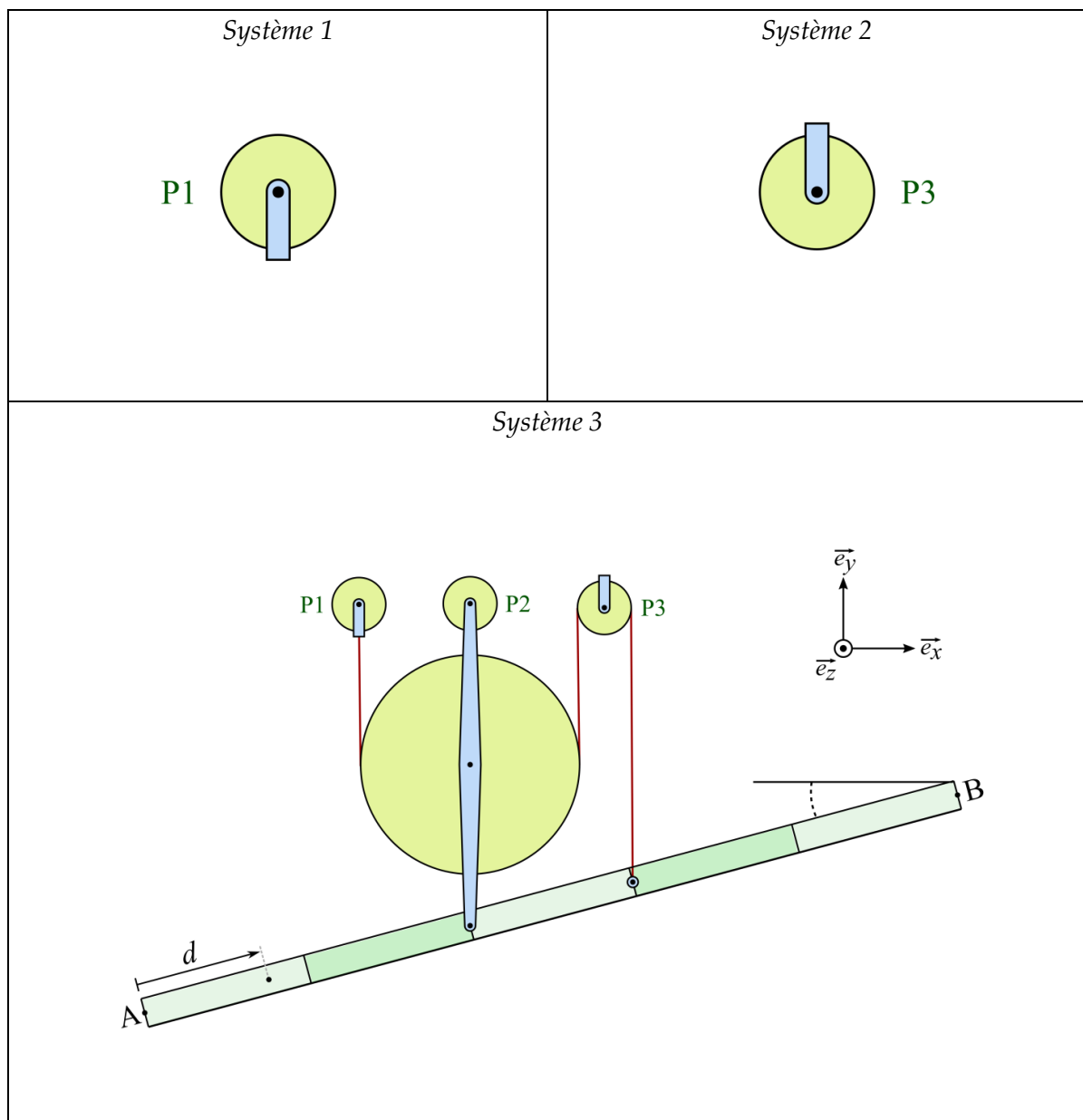


Figure 1a4b

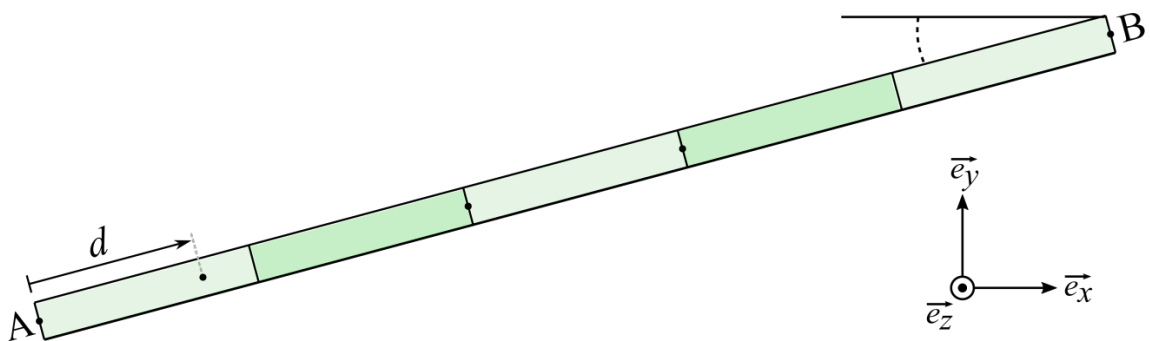


Figure 1a4c

Solution 1a4

- (a) Les forces externes agissant sur les systèmes sont indiqués dans la figure 1a4d.
- (b) On utilise les équations de la statique sur les systèmes dessinés dans la figure 1a4d :

$$4T_1 + T_2 - (mg + mg + mg + 3mg + 4mg + 5mg) = 0 \quad (1)$$

$$T_2 - 2T_3 - mg = 0 \quad (2)$$

$$2T_1 - T_3 - mg = 0 \quad (3)$$

Les solutions des trois équations sont :

$$\boxed{\begin{array}{l} T_1 = 2mg \\ T_2 = 7mg \\ T_3 = 3mg \end{array}} \quad (4)$$

- (c) Les forces externes agissant sur la barre sont indiqués dans la figure 1a4e.
- (d) L'inconnue T_y est trouvé avec l'équation de la statique le long de la direction y :

$$\sum F_y = T_y + 3mg - 4mg - 5mg = 0 \quad (5)$$

La solution est :

$$T_y = 6mg$$

On calcule la condition d'équilibre statique des moments selon le point A :

$$\sum M_A = 4mgd \cos \alpha + 5mg\left(\frac{5L}{2}\right) \cos \alpha - 6mg(2L) \cos \alpha - 3mg(3L) \cos \alpha = 0 \quad (7)$$

$$\boxed{d = \frac{17L}{8}} \quad (8)$$

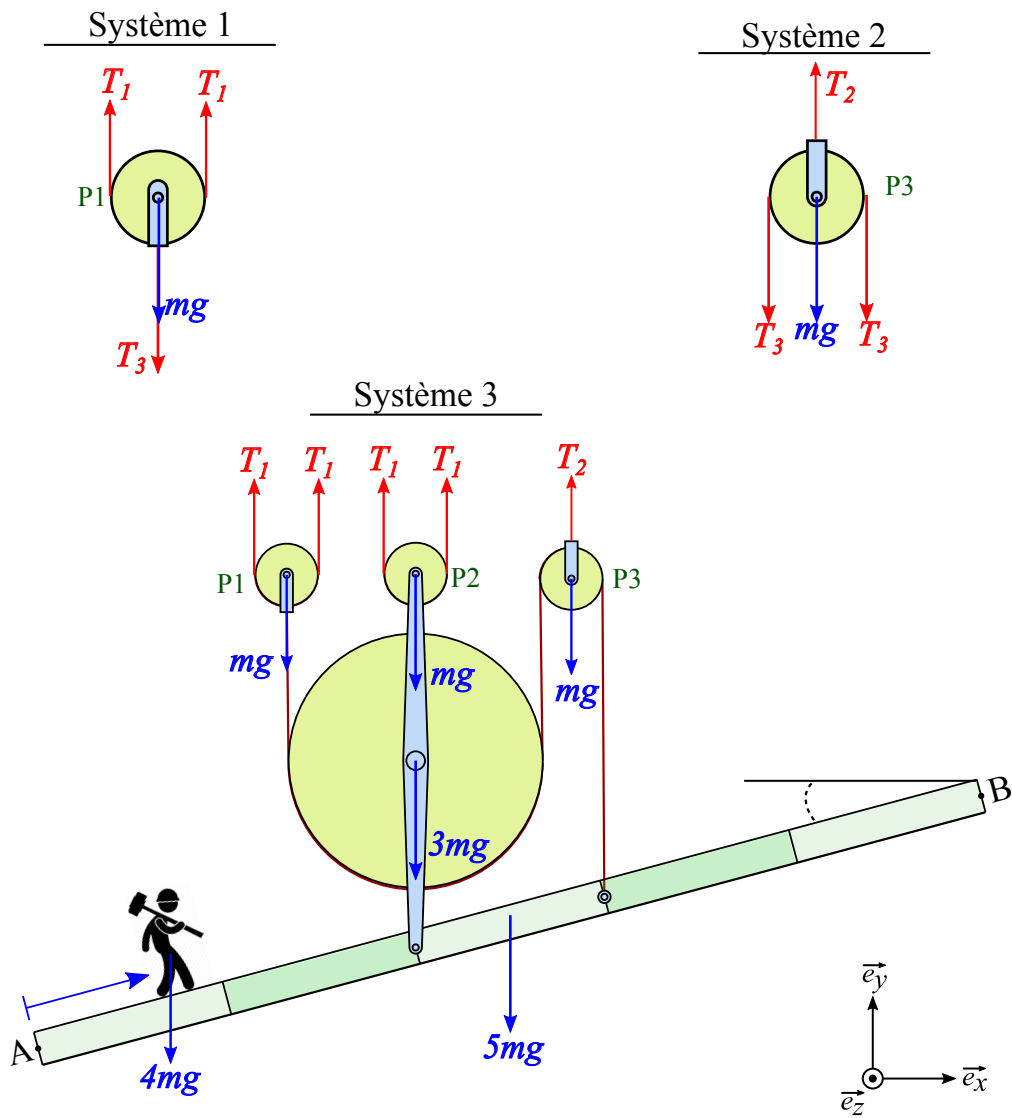


Figure 1a4d

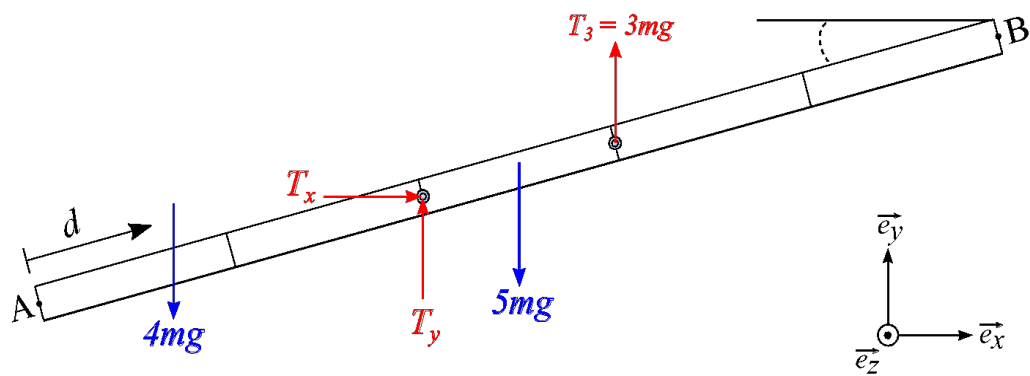


Figure 1a4e

Question 1a5 Réaction du mur sur un système incluant un ressort générant un moment sur une poulie

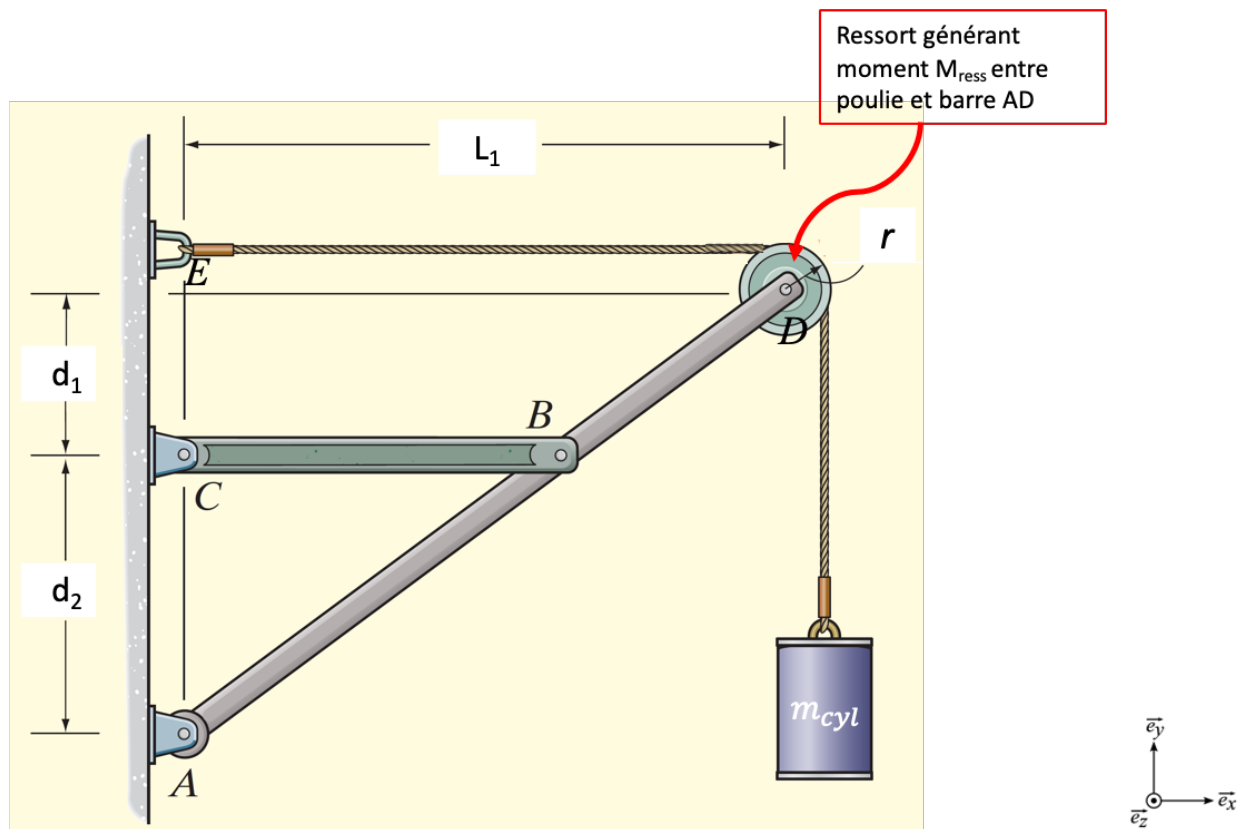


Figure 1a5.1

On souhaite trouver les forces que le système exerce sur le mur afin de choisir des fixations adéquates.
Le job : **Trouver les forces de réaction aux points A et E.**

Un ressort spiral, fixé à la barre AD au point D, impose sur la poulie un moment $+M_{ress}$ selon le vecteur $\vec{e}_z$. La poulie impose donc un moment $-M_{ress}$ sur la barre AD au point D. Le Moment M_{ress} est un moment *interne* au système entier ($+M_{ress} - M_{ress} = 0$), et n'est donc pas représenté dans la figure ci-dessus.

- Le système est statique
- Le cylindre a une masse m_{cyl}
- Poulie de rayon r
- On néglige les masses des cordes, de la poulie, du moteur, et des barres

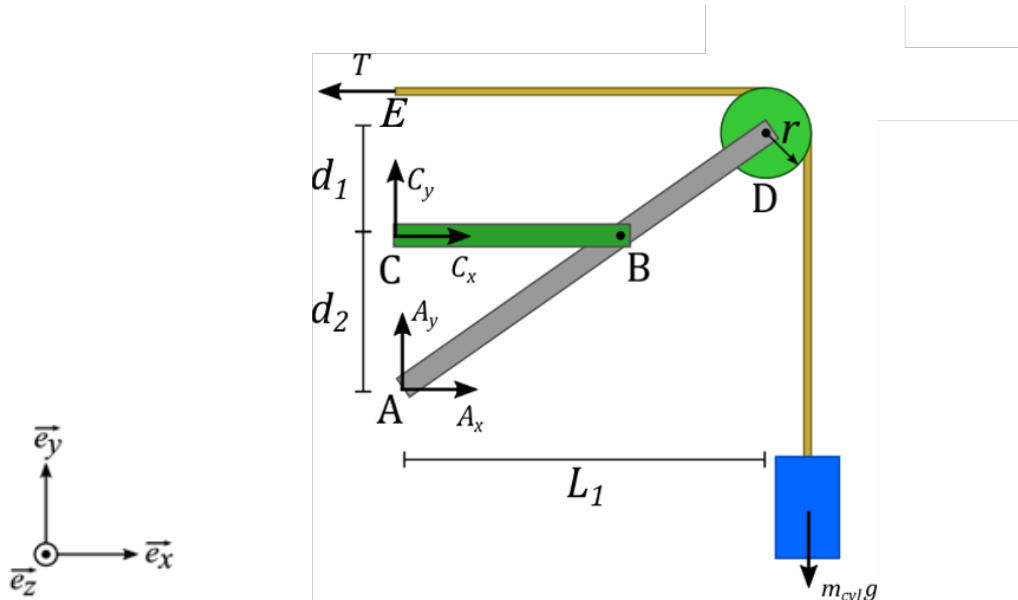
Indice : une possibilité de marche à suivre est :

- i. Diagramme des forces du système entier (comme toujours, c'est la première étape).
- ii. Analyse du sous-système poulie (ici on fera apparaître le moment M_{ress}).
- iii. Analyse du sous-système barre CB
- iv. Analyse du sous-système barre AD. Attention, action = réaction pour M_{ress} , donc pensez aux forces et moments au point D

Trouver A_x , A_y et T et interprétez. Que se passe-t-il si $M_{ress} = 0$? si $d_1 = L_1$? Peut-on avoir $A_x = 0$?

Solution 1a5

i) Diagramme des Forces du système complet



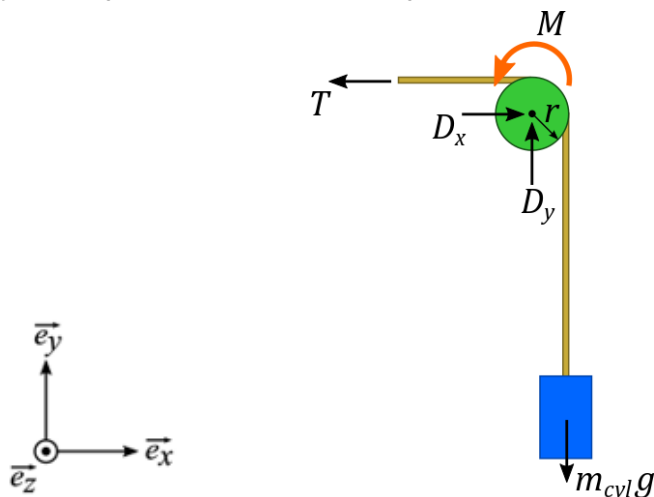
Les forces et moment externes au système sont :

- Force de gravité $m_{cyl} g$ sur la masse
- Forces de réaction selon x et selon y en A et en C (car chaque pivot bloque 2 axes de translation)
- Force de réaction T en E selon la direction du câble (soit selon x)
- Pas de moment de liaison en A et en C car pivot (libre, sans ressort)

Il y a 5 inconnues : A_x , A_y , C_x , C_y , et T

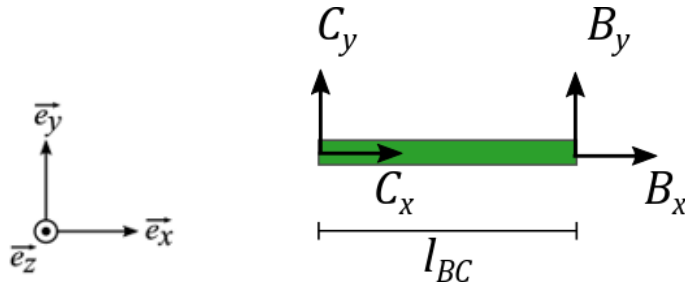
Mais nous n'avons que 3 équations (somme des forces en x , somme des forces en y , et somme des moments selon z). Il faudra donc décomposer en sous-systèmes pour trouver A_x , A_y , et T

ii) Sous-système – Poulie D + cylindre



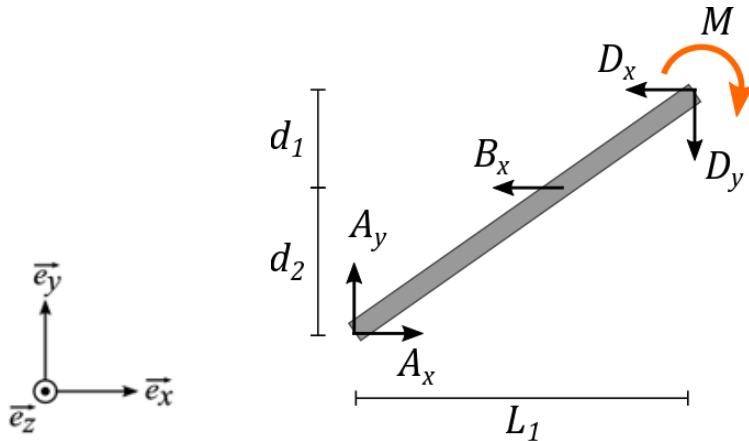
$$\begin{array}{l}
 \text{Somme forces } \vec{e}_x \\
 \text{Somme forces } \vec{e}_y \\
 \text{somme Moments point D}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 -T + D_x = 0 \\
 D_y - m_{cyl} g = 0 \\
 T r + M_{ress} - m_{cyl} g r = 0
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 T = m_{cyl} g - \frac{M_{ress}}{r} \\
 D_x = m_{cyl} g - \frac{M_{ress}}{r} \\
 D_y = m_{cyl} g
 \end{cases}$$

iii) Sous-système - barre BC



$$\begin{array}{l}
 \text{selon } \vec{e}_x \\
 \text{selon } \vec{e}_y \\
 \text{somme des Moment au pt C} = 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 C_x + B_x = 0 \\
 C_y + B_y = 0 \\
 B_y l_{BC} = 0
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 B_y = 0 \\
 C_y = 0 \\
 C_x = -B_x
 \end{cases}$$

iv Sous-système - poutre AD



v. calcul de A_x et A_y avec sous-système poutre AD puis avec les résultats des autres sous-systèmes.

$$\begin{array}{l}
 \vec{e}_x \\
 \vec{e}_y \\
 \text{somme Moments pt A}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 A_x - B_x - D_x = 0 \\
 A_y - D_y = 0 \\
 B_x d_2 + D_x (d_1 + d_2) - D_y L_1 - M_{ress} = 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & A_x - B_x - \left(m_{cyl} g - \frac{M_{ress}}{r}\right) = 0 \\
 \Rightarrow & A_y - m_{cyl} g = 0 \\
 & B_x d_2 + \left(m_{cyl} g - \frac{M_{ress}}{r}\right)(d_1 + d_2) - m_{cyl} g L_1 - M_{ress} = 0 \\
 \Rightarrow & B_x = m_{cyl} g \left(\frac{L_1 - d_1 - d_2}{d_2}\right) + \frac{M_{ress}}{d_2} + \frac{M_{ress}}{r} \left(\frac{d_1 + d_2}{d_2}\right)
 \end{aligned}$$

$$A_x = m_{cyl} g \left(\frac{L_1 - d_1}{d_2}\right) + \frac{M_{ress}}{d_2} + \frac{M_{ress}}{r} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)$$

$$A_y = m_{cyl} g$$

$$T = m_{cyl} g - \frac{M_{ress}}{r}$$

Note / interprétation:

Si $M_{ress} = 0$,

$$A_x = m_{cyl} g \left(\frac{L_1 - d_1}{d_2}\right) \quad (\text{simple bras de levier})$$

$A_y = m_{cyl} g$. cohérent avec $C_y = 0$. Peu importe le ressort, faut quand même soutenir la masse

$$T = m_{cyl} g$$

Si $L_1 = d_1$, alors A_x ne dépend plus de $m_{cyl} g$. $A_x = \frac{M_{ress}}{d_2} \left(1 + \frac{d_1}{r}\right)$. Toute la réaction en x est alors à B et E

Si M_{ress} est positif, plus le moment du ressort est grand, plus la force A_x sera grande, et donc le support en A doit être renforcé. Mais T sera plus petit. Nous avons fait le calcul pour le cas statique. Si M_{ress} est assez grand, la masse commencera à monter, et nos hypothèses de statique ne sont plus valables.

Si M_{ress} est négatif, T augmente, A_x devient plus petit. Il y a une valeur de M_{ress} pour laquelle $A_x = 0$

Nous n'avons pas utilisé le diagramme des forces du système complet. Mais on peut facilement vérifier que les réponses ci-dessus sont cohérentes avec le diagramme des forces du système complet.